На правах рукописи

Ложкин Александр Сергеевич

Фундаментальные симметрии обыкновенных дифференциальных уравнений

01.01.02 — дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико–математических наук

КАЗАНЬ — 2010

Работа выполнена в Российском государственном педагогическом университете им. А. И. Герцена

Научный руководитель: доктор физико–математических наук, профессор Зайцев Валентин Фёдорович

Официальные оппоненты: доктор физико–математических наук, профессор Аксенов Александр Васильевич

доктор физико–математических наук, профессор Деревенский Владислав Павлович

Ведущая организация: Воронежский государственный университет

Защита состоится 22 апреля 2010 г. в 14 часов 30 минут на заседании диссертационного совета Д 212.081.10 при Казанском государственном университете имени В. И. Ульянова–Ленина по адресу:
г. Казань, ул. Профессора Нужина, 1/37, ауд. 324.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке имени Н. И. Лобачевского Казанского государственного университета.

Автореферат разослан ____ марта 2010 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
кандидат физ.–мат. наук, доцент Е. К. Липачев

I. Общая характеристика работы

Настоящая диссертационная работа посвящена разработке новых подходов и алгоритмов группового анализа обыкновенных дифференциальных уравнений.

Актуальность темы исследования. Задача поиска точного аналитического решения обыкновенных дифференциальных уравнений в замкнутом виде была и остается одной из важнейших задач, широко востребованная в приложениях. Область математики, связывающая изучение свойств дифференциальных уравнений и поиск их решений с допускаемыми группами преобразований, т. е. с симметриями, получила название группового анализа дифференциальных уравнений. С помощью методов группового анализа оказывается возможным не только прогнозировать интегрируемость уравнения в квадратурах, но и указать оптимальный способ редукции, сводя к минимуму трудоемкость, что немаловажно при проведении сложных расчетов.

К сожалению, и сегодня практическое применение свойств симметрии основывается чаще всего не на знании методов группового анализа, а на случайных, более или менее удачных догадках. К тому же имеются уравнения, которые интегрируются, но не имеют классических симметрий. Поэтому необходимо расширить класс симметрий и найти новые методы их поиска. Групповой анализ является естественным инструментом в задачах моделирования и при решении уравнений, возникающих в самых разнообразных приложениях. Поэтому разработка новых подходов и алгоритмов группового анализа является чрезвычайно актуальной.

Степень разработанности проблемы. До середины девятнадцатого века классическая теория интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений во многом представляла собой огромное множество специальных методов и приемов, предназначенных для решения некоторых частных, на первый взгляд не связанных между собой типов уравнений. И лишь в середине девятнадцатого века норвежский ученый Софус Ли сделал открытие, состоящее в том, что все эти специальные методы на самом деле являются частными случаями общей процедуры интегрирования, основанной на инвариантности дифференциального уравнения относительно некоторой непрерывной группы симметрий. Однако в то время теория Ли не нашла широкого применения – подавляющее большинство математиков считало, что все, что можно проинтегрировать в замкнутой форме, уже проинтегрировано в работах классиков, и дальнейшие результаты могут быть получены лишь путем отказа от непременной представимости решения в замкнутом аналитическом виде.

Возрождение интереса к групповому анализу произошло лишь в середине XX века, начиная с работ Л. В. Овсянникова, который убедительно показал, что идеи С. Ли применимы не только для построения общих решений ОДУ – описание свойств дифференциальных уравнений при помощи допускаемых групп позволяет строить классы точных инвариантных решений и помогает в качественных исследованиях уравнений механики и математической физики. Дальнейшее развитие симметрийного анализа шло по нескольким направлениям:

1) обобщение понятия инфинитезимального оператора – определение нелокальных переменных, нелокальных и формальных операторов, появление алгоритмов поиска неклассических симметрий,
2) широкое распространение обратных задач,
3) доказательство теорем о факторизации,
4) попытки применения дискретных симметрий, приведшие к появлению дискретно-группового анализа.

Расширение области применений потребовало существенного усиления методов группового анализа, разработки новых понятий и алгоритмов. Возникшие в связи с этим проблемы и перспективы развития стимулировали большое число исследований. Стало ясно, каким действенным инструментом является групповой анализ при решении сложных задач. Он существенно расширяет и уточняет интуитивное понимание симметрии, вооружает конструктивными методами ее использования, ведет к правильной постановке задач, а во многих случаях позволяет увидеть возможные пути решения.

Целью диссертации является построение основ теории фундаментальных симметрий обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ).

Для достижения поставленной цели в диссертации предполагается решение следующих взаимосвязанных **задач**:

– Исследование свойств фундаментальных симметрий ОДУ и определяющих уравнений, решениями которых являются координаты операторов, задающих фундаментальные симметрии.

– Доказательство теорем о структуре оператора точечной фундаментальной симметрии и о построении всех симметрий ОДУ 2-го порядка на основе одной фундаментальной.

– Исследование структуры ОДУ, имеющей фундаментальную симметрию, и возможности редукции обычной точечной симметрии в фундаментальную.

– Поиск класса ОДУ, имеющих фундаментальную экспоненциальную нелокальную симметрию (решение обратной задачи).

– Поиск класса ОДУ, имеющих фундаментальную неэкспоненциальную нелокальную симметрию (решение обратной задачи).

Объектом исследования являются обыкновенные дифференциальные уравнения.

Предметом исследования является групповой анализ.

Теоретическую основу диссертации составили труды ведущих отечественных и зарубежных ученых и специалистов как в области группового анализа обыкновенных дифференциальных уравнений в частности, так и в области теории дифференциальных уравнений в общем.

Методы исследования. В диссертации использованы методы теории дифференциальных уравнений, включающие в себя методы группового анализа; методы общей алгебры, в частности, теория групп и алгебр Ли; элементы функционального анализа.

Научная новизна диссертационного исследования заключается в следующем – в работе впервые:

1) разрабатываются методы понижения порядка обыкновенных дифференциальных уравнений с помощью фундаментальных симметрий;
2) приводится алгоритм поиска всех симметрий обыкновенных дифференциальных уравнений по одной известной фундаментальной;
3) приводится алгоритм поиска фундаментальных экспоненциальных нелокальных симметрий, допускаемых уравнениями второго и третьего порядков;
4) решается обратная задача для уравнений второго и третьего порядков, допускающих фундаментальные неэкспоненциальные нелокальные симметрии.

Практическая значимость результатов диссертационной работы заключается в возможном использовании выводов и теорем при интегрировании уравнений, при попытке понижения порядка дифференциального уравнения. Данная работа предлагает другой подход к теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Найдена глубокая аналогия между свойствами фундаментальной системы решений обыкновенных дифференциальных уравнений и фундаментальными симметриями. Для производящей функции симметрии, которая является решением однородного уравнения в полных производных, может быть применена техника, которую мы используем для решения обыкновенных линейных дифференциальных уравнений. Групповой анализ позволяет решать уравнения, не имеющие фундаментальных решений, но имеющие фундаментальные симметрии. Таким образом, если невозможно найти фундаментальную систему решений, то можно воспользоваться фундаментальными симметриями, и с их помощью понизить порядок или факторизовать уравнение.

Апробация результатов работы. Основные теоретические и практические результаты диссертационной работы докладывались на ряде научно-практических конференций в г. Санкт-Петербурге:

"Студент – исследователь – учитель" на базе РГПУ им. А. И. Герцена, 2003 г.;

"Герценовские чтения – 2005" в РГПУ им. А. И. Герцена, 2005 г.

Публикации. Основные результаты опубликованы в пяти печатных работах, две из них в изданиях, рекомендованных ВАК.

Структура и объём работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, библиографического списка из 34 наименований. Общий объем работы составляет 90 страниц.

II. Краткое содержание работы

Во введении обосновывается актуальность диссертационного исследования, ставятся цели и задачи, дается экскурс в историю вопроса, приводятся определения и теоремы из классического группового анализа, которые нам потребуются при дальнейшем изложении, указывается научная новизна, практическая значимость.

В первой главе "Точечные фундаментальные симметрии" даются определения фундаментальной симметрии и ряда терминов, связанных с понятием фундаментальной симметрии, доказываются теоремы. Приводятся классические методы понижения порядка с помощью однопараметрической группы.

Фундаментальной симметрией уравнения второго порядка

$$H \equiv y'' - F(x, y, y') = 0 \tag{1}$$

будем называть канонический оператор, координата которого является решением однородного определяющего уравнения:

$$\Phi \frac{\partial H}{\partial y} + \Phi' \frac{\partial H}{\partial y'} + \Phi'' \frac{\partial H}{\partial y''} = 0. \tag{2}$$

Совершенно аналогично определяются фундаментальные симметрии обыкновенного дифференциального уравнения n-го порядка как решения уравнения в полных производных n-го порядка

$$\sum_{k=0}^{n} \Phi^{(k)} \frac{\partial H}{\partial y^{(k)}} = 0.$$

Была сформулирована и доказана теорема о структуре фундаментальной симметрии.

Теорема 3[1]. Фундаментальная точечная симметрия уравнения (2) имеет производящую функцию, не зависящую от производной. Иными словами, оператор фундаментальной точечной симметрии уравнения (1) имеет вид $X = \Phi(x, y)\partial_y$, где под знаком ∂_y будем понимать частную производную по переменной y, т. е. $\partial_y = \frac{\partial}{\partial y}$.

В групповом анализе обычно ставятся либо прямая, либо обратная задачи. В прямой задаче по известному уравнению (или классу уравнений) ищутся операторы, которые допускаются данным уравнением (классом уравнений). Если исследуется конкретное уравнение, то прямая задача называется групповым анализом, если задан класс уравнений – то такая задача называется групповой классификацией. Конечной целью прямой задачи, как правило, является интегрирование или максимальное упрощение исходного уравнения. В обратной задаче отправной точкой является оператор – ограниченная обратная задача (или класс операторов – общая обратная задача), и строится класс уравнений, обладающих априорно заданной этим типом оператора симметрией. В этом случае искомое уравнение конструируется из инвариантов оператора.

Во второй главе “Дальнейшее изучение свойств фундаментальных симметрий” мы разрабатываем алгоритм поиска симметрии обыкновенных дифференциальных уравнений, рассматривая инвариантность на всей плоскости, а не только на многообразии.

[1]Нумерация теорем в автореферате совпадает с нумерацией теорем в диссертации.

Так если известна одна фундаментальная симметрия, мы находим вторую, а затем по методу Лагранжа находим все остальные.

Алгоритм нахождения всех симметрий уравнения H, исходя из формального оператора $X = \Phi\partial_y$, где $\Phi = \Phi(x, y, y', y'', \ldots)$, выглядит следующим образом. Координата оператора, вообще говоря, зависит от производных сколь угодно большого порядка вплоть до бесконечного. Сначала будем искать симметрии, удовлетворяющие однородному условию инвариантности (2).

Рассмотрим вариант, когда $\Phi_1(x, y)$ – производящая функция фундаментальной симметрии – выражена в явном виде. Будем искать конкретное уравнение H, которое будет допускать этот оператор $\Phi_1\partial_y$. Для этого рассматриваем определяющее уравнение (2) – условие инвариантности. Предполагая, что третье слагаемое равно 0, находим первый инвариант. Из классического группового анализа известно, что функция H, задающая исследуемое уравнение, есть функция от x, I_1, I_2, где I_1 – инвариант первого порядка допускаемого уравнением H оператора X, а I_2 – инвариант второго порядка этого же оператора. Следовательно, из однородного определяющего уравнения находим I_2, которое и является уравнением H. Далее, зная Φ_1 и H, можно найти Φ_2 – второй фундаментальный оператор, используя определяющее уравнение, представляя Φ_2 в виде произведения Φ_1 и некоторой функции от x – $\Phi_1 u(x)$ и находя эту функцию $u(x)$.

Далее рассматривается полное определяющее уравнение:

$$\Phi\frac{\partial H}{\partial y} + \Phi'\frac{\partial H}{\partial y'} + \Phi''\frac{\partial H}{\partial y''}\Big|_H = 0,$$

которое можно записать в виде неоднородного уравнения:

$$\Phi\frac{\partial H}{\partial y} + \Phi'\frac{\partial H}{\partial y'} + \Phi''\frac{\partial H}{\partial y''} = \sum_k A_k D_x^k H. \qquad (3)$$

Это уравнение легко решается методом Лагранжа, в результате чего можно выписать общее решение с произвольным набором A_k.

Совершенно аналогично классическому методу Лагранжа ищем решение в виде

$$\Psi = C_1(x, y, y', \ldots)\Phi_1(x, y, y', \ldots) + C_2(x, y, y', \ldots)\Phi_2(x, y, y', \ldots),$$

где Φ_1, Φ_2 – фундаментальные решения исходного однородного уравнения, а C_1, C_2 – рассматриваем как функции от всех переменных продолженного пространства.

Функции C_1 и C_2 в методе Лагранжа приобретают следующий вид:

$$C_2 = D_x^{-1}\left[\frac{\sum\limits_{k=0}^{\infty} A_k(x, y, y', ...) D_x^k[H]}{\Phi_2\left(\frac{\Phi_2'}{\Phi_2} - \frac{\Phi_1'}{\Phi_1}\right)}\right].$$

$$C_1 = -D_x^{-1}\left[\frac{\sum\limits_{k=0}^{\infty} A_k(x, y, y', ...) D_x^k[H]}{\Phi_1\left(\frac{\Phi_2'}{\Phi_2} - \frac{\Phi_1'}{\Phi_1}\right)}\right].$$

Таким образом, определяются все симметрии найденного класса уравнений. Конкретные классы симметрий можно выделить и найти, наложив дополнительные условия на найденное общее решение уравнения (3) до перехода на многообразие (1). Заметим, что предложенный выше алгоритм нахождения всех симметрий уравнения применим и для операторов, в которых Φ_1 задана в виде бесконечного ряда, т. е. с нелокальной Φ.

Также во второй главе рассматриваются фундаментальные симметрии ОДУ высших порядков.

В третьей главе “Нелокальные фундаментальные симметрии” дается определение понятиям “экспоненциальной нелокальной симметрии” и “неэкспоненциальной нелокальной симметрии”, приводится алгоритм поиска экспоненциальных нелокальных симметрий, допускаемых уравнением второго и третьего порядков, решается обратная задача для уравнений второго и третьего порядков, допускающих фундаментальные неэкспоненциальные нелокальные симметрии.

Симметрия называется **экспоненциальной нелокальной**, если она имеет вид

$$\Phi = \eta(x, y) \exp\left(\int \zeta(x, y, y')\, dx\right),$$

и при этом интеграл под знаком экспоненты – полный ($= D_x^{-1}$) и не берется в явном виде (т.е. невозможно найти в замкнутом виде такую функцию

σ, что $D_x\sigma(x,y)=\zeta$). Соответствующий данной симметрии оператор называется **экспоненциальным нелокальным оператором**.

Теорема 12. Уравнение второго порядка (2) имеет фундаментальную экспоненциальную нелокальную симметрию, если его правая часть представима в виде

$$F=\zeta y'+\frac{\partial}{\partial x}\left(\int\zeta\,\partial y\right)+\Omega\left(y'-\int\zeta\,\partial y\right),$$

где Ω – произвольная функция указанного аргумента, ζ – произвольная функция переменных x и y.

Теорема 13. Уравнение третьего порядка

$$H\equiv y'''-F(x,y,y',y'')=0$$

имеет фундаментальную экспоненциальную нелокальную симметрию, если его правая часть представима в виде

$$F=\int(\zeta_{xx})\,\partial y+2\zeta_x y'+\zeta_y(y')^2+\\+\zeta y''+3\int(\zeta\,(\zeta_x+\zeta_y y'))\,\partial y+\int\zeta^3\partial y+\Omega(y',y''),$$

где Ω – произвольная функция переменных y' и y'', ζ – произвольная функция переменных x, y и y'.

Симметрия называется **неэкспоненциальной нелокальной**, если она имеет вид

$$\Phi=\eta(x,y)\int\zeta(x,y)\,dx,$$

и при этом интеграл – полный ($=D_x^{-1}$) и не берется в явном виде (т. е. невозможно найти в замкнутом виде такую функцию σ, что $D_x\sigma(x,y)=$ $=\zeta$). Соответствующий данной симметрии оператор называется **неэкспоненциальным нелокальным оператором**.

III. Заключение

Приведем общие выводы по работе:

1. Исследованы свойства фундаментальных симметрий ОДУ и определяющих уравнений, решениями которых они являются.
2. Доказаны теоремы о структуре оператора точечной фундаментальной симметрии и о построении всех симметрий ОДУ 2-го порядка

на основе одной фундаментальной, а для 3-го порядка – по двум известным фундаментальным симметриям; приведены примеры, иллюстрирующие эти теоремы.

3. Исследована структура ОДУ, имеющего фундаментальную симметрию, и возможности редукции обычной точечной симметрии в фундаментальную.
4. Найден класс ОДУ, имеющих фундаментальную экспоненциальную нелокальную симметрию (решена обратная задача).
5. Найдены классы ОДУ 2-го и 3-го порядков, имеющих фундаментальную неэкспоненциальную нелокальную симметрию (решена обратная задача).

Метод фундаментальных симметрий полезен для теории дифференциальных уравнений тем, что дает альтернативный алгоритм поиска симметрий, и в ряде случаев оказывается более эффективным, чем классический подход С. Ли. В любом случае фундаментальность симметрии дает нам дополнительную информацию о структуре уравнения.

Практически, если невозможно напрямую решить определяющее уравнение, фундаментальные симметрии можно искать еще двумя способами:

1. Использовать классический метод Ли. Если найдется симметрия вида $\eta(x, y)\partial_y$, то воспользовавшись теоремой 10 о фундаментализирующем множителе, получим фундаментальную симметрию.
2. Применить известные решения обратных задач (теоремы 12 и 13), если исследуемое уравнение принадлежит рассматриваемому в теоремах классу.

Автор выражает благодарности своему научному руководителю Валентину Фёдоровичу Зайцеву за помощь при обсуждении поставленных задач и постоянную поддержку при подготовке и написании диссертационной работы.

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

в изданиях, рекомендованных ВАК:

1. Зайцев, В. Ф. Фундаментальные нелокальные симметрии обыкновенных дифференциальных уравнений/ В. Ф. Зайцев, А. С. Ложкин// Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления, Выпуск 1. – СПб.: Издательство Санкт-Петербургского университета, 2009. С.65-70.

2. Зайцев, В. Ф. Фундаментальные симметрии обыкновенных дифференциальных уравнений/В. Ф. Зайцев, А. С. Ложкин// Известия РГПУ им. А. И. Герцена, – 2007. – №8(38). – С.13-23.

в других изданиях:

3. Зайцев, В. Ф. О разрешимости обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка/ В. Ф. Зайцев, А. С. Ложкин// Труды Математического Центра им. Н. И. Лобачевского. – Казань: Издательство Казанского математического общества, Издательство Казанского государственного университета, 2004. С.48-53.

4. Ложкин, А. С. Фундаментальные симметрии уравнения 2-го порядка/ А. С. Ложкин// Вестник студенческого научного сообщества РГПУ им. А. И. Герцена. Сборник лучших научных работ. – СПб.: Издательство РГПУ им. А. И. Герцена, 2003. С.206.

5. Ложкин, А. С. О представлении нелокального оператора в экспоненциальной форме/А. С. Ложкин// Вестник студенческого научного сообщества РГПУ им. А. И. Герцена. Сборник лучших научных работ. – СПб.: Издательство РГПУ им. А. И. Герцена, 2005. С.43-46.